ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

I. Γενικά

Σε μαθήματα όπως η επιχειρησιακή έρευνα και ή λήψη αποφάσεων αναφέραμε τις αποφάσεις κάτω από συνθήκες βεβαιότητας, στις οποίες και εφαρμόζονται κυρίως οι τεχνικές της επιχειρησιακής έρευνας. Επίσης, σε αυτά τα μαθήματα μελετήθηκαν οι αποφάσεις κάτω από συνθήκες κινδύνου, στις οποίες γνωρίζουμε τις πιθανότητες εμφάνισης των διαφόρων καταστάσεων της φύσης, και σε συνέχεια ασχοληθήκαμε με βασικές έννοιες της θεωρίας των πιθανοτήτων, το θεώρημα του Bayes, τα δένδρα αποφάσεων και την διαδικασία Markov.

Υπάρχει όμως και μια ιδιαίτερη κατηγορία αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας που αφορούν τα προβλήματα ανταγωνισμού ή συγκρούσεων. Τα προβλήματα αυτά δημιουργούνται όταν η αποτελεσματικότητα εφαρμογής μιας απόφασης που παίρνει ένα πρόσωπο Α (ή μία ομάδα προσώπων Α) περιορίζεται εξαιτίας της εφαρμογής μιας απόφασης που παίρνει άλλο πρόσωπο Β (ή ομάδα προσώπων Β). Το χαρακτηριστικό λοιπόν γνώρισμα αυτών των αποφάσεων είναι ότι ούτε ο Α ούτε ο Β μπορούν να επιτύχουν τον αντικειμενικό στόχο που επιδιώκουν, εφαρμόζοντας τη μια ή την άλλη στρατηγική (όπως, αντίθετα, συμβαίνει στα προβλήματα π.χ. γραμμικού προγραμματισμού, όπου επιλέγεται η στρατηγική με την οποία πραγματοποιείται ο αντικειμενικός στόχος της μεγιστοποίησης του κέρδους ή ελαχιστοποίησης του κόστους κτλ.). Τα προβλήματα αυτά λέγονται προβλήματα «παιγνίων», και για την αντιμετώπιση τους αναπτύχθηκε η «θεωρία των παιγνίων» (Game Theory).

Η θεωρία των παιγνίων διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τους μαθηματικούς Gardan, Pascal, Galileo, Waldergrave τον XVII και XVIII αιώνα και χρησιμοποιήθηκε κυρίως για την επίλυση προβλημάτων στρατιωτικής φύσης. Η σημερινή όμως εξέλιξη της θεωρίας των παιγνίων οφείλεται στον John von-Neumann (δημοσίευσε το 1944 το έργο «Theory and Practice of Games and Economic Behavior»), που σε συνεργασία με τον Oskar Morgenstern δημοσίευσε το 1947 το γνωστό έργο «Η θεωρία των παιγνίων και η οικονομική συμπεριφορά», (Theory of Games and Economic Behavior). Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, η οικονομική ζωή είναι ένα παιχνίδι παικτών, που ο καθένας παίζει για δικό του λογαριασμό (μπορεί και να συνάψει συμμαχία με άλλους), προβλέπει δε να εξασφαλίσει το μεγαλύτερο κέρδος ή την ελάχιστη ζημία έναντι του άλλου (ή άλλων παικτών). Έτσι και η επιχείρηση επιδιώκει, εφαρμόζοντας διάφορες στρατηγικές, ορισμένους αντικειμενικούς στόχους που συγκρούονται με τους στόχους άλλης (ή άλλων επιχειρήσεων). Εκείνο που βασικά προσφέρει η θεωρία των παιγνίων στον οικονομολόγο (ή τον πολιτικό ή τον στρατιωτικό) δεν είναι τόσο ο καθορισμός μιας κάποιας στρατηγικής που θα επιλέξει, διότι το πεδίο εφαρμογής της είναι περιορισμένο, αλλά κυρίως ένα τρόπο σκέψης, γιατί αυτή καθεαυτή η θεωρία των παιγνίων είναι μια αυστηρή λογική, ένα ορθολογισμός, καθώς και ένα καλύτερο σημείο εκκίνησης για την έρευνα και μελέτη των πολύπλοκων και δύσκολων προβλημάτων ανταγωνισμού ή συγκρούσεων .

ΙΙ. Διάκριση «παιγνίων» σε κατηγορίες

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο πρώτο μέρος αυτής της εργασίας, τα «παίγνια» διακρίνονται στις παρακάτω δυο γενικές κατηγορίες:

α) «Παίγνια» του ανθρώπου εναντίον της φύσης.

β) «Παίγνια» μεταξύ δυο ή περισσοτέρων ατόμων («παίγνια» ενός ατόμου που αντιμάχεται μια ομάδα ατόμων ή «παίγνια» δυο αντιμαχόμενων ομάδων ή «παίγνια» μεταξύ περισσότερων ατόμων ή ομάδων) .

Η κύρια διαφορά μεταξύ των δυο αυτών γενικών κατηγοριών είναι ότι η «φύση» δεν είναι δυνατό να θεωρηθεί σαν ένας «έξυπνος» και «συνετός» αντίπαλος, ο οποίος «επιδιώκει» ένα συγκεκριμένο στόχο το παιχνίδι κατευθύνεται κυρίως από την τύχη. Αντίθετα, η βασική προϋπόθεση πάνω στην οποία βασίζεται η θεωρία των παιγνίων είναι ότι: και οι δυο παίκτες είναι «έξυπνοι» και «συνετοί», δηλαδή γνωρίζουν τις διαθέσιμες εναλλακτικές λύσεις του αντίπαλου παίκτη και τ' αντίστοιχα από την εφαρμογή τους αποτελέσματα και ο καθένας από αυτούς προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το κέρδος του (ή να ελαχιστοποιήσει την ζημία του) σε βάρος του άλλου παίκτη.

Όπως είναι φανερό, ένα παιχνίδι της δεύτερης κατηγορίας δεν κατευθύνεται από μόνη την τύχη, γιατί ο παίκτης για κάθε πιθανή κίνηση του αντιπάλου του θα επιλέξει τον τρόπο δράσης που θα δώσει τις λιγότερες δυνατότητες επιτυχίας στον αντίπαλο του .

Τα παιχνίδια της δεύτερης κατηγορίας τα διακρίνουμε σε συνέχεια στις παρακάτω ομάδες:

αα) «Παίγνια» μεταξύ δυο ή περισσότερων ατόμων με έκβαση ίση με το μηδέν. Στα παιχνίδια αυτά το άθροισμα των κερδών του ενός παίκτη (ή της μιας ομάδας) και των απωλειών του αντίπαλου παίκτη (ή της αντίπαλης ομάδας) ισούται με το μηδέν, δηλ. τα κέρδη του ενός είναι ζημιές του άλλου. Για αυτό το λόγο τα παιχνίδια αυτά ονομάζονται «παίγνια» μηδενικού αθροίσματος (zero-sum games) .

ββ) «Παίγνια» μεταξύ δυο ή περισσότερων ατόμων με έκβαση ≠ του μηδενός (non zero-sum games). Στα παιχνίδια αυτά το κέρδος του ενός διαφέρει από τη ζημιά του άλλου παίκτη. Αυτό συμβαίνει, επειδή σε κάθε σειρά ενεργειών υπεισέρχονται και άλλοι παράγοντες, είτε τυχαίοι είτε ανεξάρτητοι από τη θέληση των δυο αντιπάλων, με συνέπεια το άθροισμα των κερδών και των απωλειών να είναι $\neq 0$. Ένας τέτοιος παράγοντας μπορεί να είναι π.χ. το κράτος, όταν έρχεται σε αντίθεση με τον ανταγωνισμό των παικτών και παίρνει και αυτό μέρος στο παιχνίδι με σκοπό είτε να αποκτήσει ορισμένα οφέλη ή να υποστηρίξει, για διάφορους λόγους, τον ένα παίκτη.

Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με τα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος μεταξύ δυο ατόμων.

ΙΙΙ. Παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος μεταξύ δυο ατόμων (Two-person, zero-sum games)

Πριν ασχοληθούμε με την λογική της επίλυσης και της διάκρισης αυτής της κατηγορίας των παιχνιδιών, θα δώσουμε ένα γενικό υπόδειγμα ενός παιχνιδιού και θα αναφέρουμε μερικές βασικές έννοιες και όρους της θεωρίας των παιγνίων.

Το γενικό υπόδειγμα ενός παιγνιδιού μεταξύ δυο ατόμων είναι το ακόλουθο :

	q_j	q_1	q_2		q_j		q_n
p_1	Στρατηγικές παίκτη Β / Στρατη-γικές παίκτη Α	Y_1	Y_2	---	Y_j	-----	Y_n
p_1	X_1	$A(a_{11})$	$A(a_{12})$	---	$A(a_{1j})$	------	$A(a_{1n})$
p_2	X_2	$A(a_{21})$	$A(a_{22})$	---	$A(a_{2j})$	------	$A(a_{2n})$
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
p_i	X_2	$A(a_{i1})$	$A(a_{i2})$	---	$A(a_{ij})$	------	$A(a_{in})$
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
p_m	X_m	$A(a_{m1})$	$A(a_{m2})$	---	$A(a_{mj})$	------	$A(a_{mn})$

Διάγραμμα 74: Γενικό υπόδειγμα μήτρας παιχνιδιού (ή πληρωμών). Όπου:

X_i= Οι εναλλακτικές στρατηγικές (εναλλακτικοί τρόποι δράσης) που διαθέτει ο παίκτης Α.

Y_j= Οι εναλλακτικές στρατηγικές που διαθέτει ο παίκτης Β.

$A(a_{ij})$ = Η αξία του αποτελέσματος (πληρωμή) για κάθε συνδυασμό στρατηγικών Xi-Y_j.

P_i = Οι πιθανότητες επιλογής των στρατηγικών X_i (όταν εφαρμόζεται μικτή στρατηγική).

q_j = Οι πιθανότητες επιλογής των στρατηγικών Y_j (μικτή στρατηγική).

Η μήτρα παιχνιδιού εκφράζει συνήθως τις πληρωμές του παίκτη Β (ζημίες του Β) προς τον παίκτη Α (κέρδη του Α).

Οι εναλλακτικές στρατηγικές που έχει στην διάθεση του κάθε παίκτης ονομάζονται «καθαρές» στρατηγικές. Όταν δε οι παίκτες Α και Β αποφασίσουν να εφαρμόσουν στο ανταγωνιστικό παιχνίδι πάντοτε την ίδια στρατηγική, τότε λέμε ότι επιλέγουν καθαρή στρατηγική (pure strategy). Αντίθετα, όταν οι παίκτες αποφασίσουν να χρησιμοποιήσουν στο ανταγωνιστικό παιχνίδι, με μια ορισμένη συχνότητα, περισσότερες από μια καθαρές στρατηγικές, τότε λέμε ότι εφαρμόζουν μικτή στρατηγική (mixed-strategy), θεωρούμε ότι, πριν αρχίσει το παιχνίδι, οι παίκτες Α και Β επιλέγουν συγχρόνως τη στρατηγική που θα εφαρμόσουν και με την επιλογή αυτή ολοκληρώνεται ένας κύκλος παιχνιδιού.

Ο κάθε παίκτης επιλέγει την βέλτιστη στρατηγική (καθαρή ή μικτή), το αποτέλεσμα δε που αναμένουν οι δυο παίκτες από την εφαρμογή των βέλτιστων στρατηγικών ονομάζεται τιμή ή αξία του παιχνιδιού (value of the game).

Επίλυση του παιχνιδιού είναι η εξεύρεση της βέλτιστης στρατηγικής (καθαρής ή μικτής) για κάθε παίκτη, καθώς και ο προσδιορισμός της αξίας του παιχνιδιού, V.

Από την τιμή ενός παιχνιδιού, V, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ένα παιχνίδι σαν δίκαιο ή άδικο (με την έννοια ότι ευνοεί τον ένα ή τον άλλο παίκτη). Έτσι, εάν $V < 0$, τότε το παιχνίδι είναι ευνοϊκό για τον παίκτη Β, εάν $V > 0$, τότε το παιχνίδι είναι ευνοϊκό για τον παίκτη Α, και τέλος, εάν $V = 0$, τότε το παιχνίδι είναι δίκαιο.
Η επίλυση του παιχνιδιού βασίζεται σ' ένα πολύ συντηρητικό κριτήριο, το κριτήριο minimax - maximin (το αναφέραμε στο πρώτο μέρος σαν κριτήριο του Wald). Σύμφωνα με το κριτήριο minimax, κάθε παίκτης επιλέγει την στρατηγική (καθαρή ή μικτή) που θα του αποφέρει το καλύτερο από τα χειρότερα δυνατά αποτελέσματα (πληρωμές). Στην περίπτωση δε που τόσο ο παίκτης Α, όσο και ο παίκτης Β, δεν έχουν κανένα όφελος ν' αλλάξουν την στρατηγική που διάλεξαν, τότε λέμε ότι έχουμε μια βέλτιστη λύση και ότι το παιχνίδι είναι «σταθερό», δηλαδή βρίσκεται σε μια κατάσταση ισορροπίας.
Τα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος μεταξύ δυο ατόμων διακρίνονται σε δυο υποκατηγορίες, στα αυστηρώς αποφασισμένα και στα μη αυστηρώς αποφασισμένα.

1. Αυστηρώς αποφασισμένα παιχνίδια (Strictly determined games) - Καθαρή στρατηγική

Παράδειγμα:
Οι επιχειρήσεις Α και Β είναι ανταγωνίστριες. Η επιχείρηση Α είναι οικονομικά ισχυρότερη από τη Β και για να αποσπάσει πελάτες από την επιχείρηση Β, σκέπτεται να εφαρμόσει τις εξής τρεις στρατηγικές:

X_1: Βελτίωση της συσκευασίας του προϊόντος.
X_2: Βελτίωση των όρων παροχής πιστώσεων.
X_3: Έντονη διαφήμιση του παραγόμενου προϊόντος.

Η επιχείρηση Β επιδιώκει τον ίδιο σκοπό και σκέπτεται να εφαρμόσει τις παρακάτω δυο στρατηγικές:

Y_1: Βελτίωση της ποιότητας του παραγόμενου προϊόντος.
Y_2: Επιτάχυνση του χρόνου παράδοσης του προϊόντος στον αγοραστή.

Η επιχείρηση Α υπολόγισε τις επιδράσεις των τριών στρατηγικών της πάνω στις πωλήσεις, καθώς και τις επιδράσεις στις πωλήσεις (της Α) των δυο στρατηγικών της Β και σε συνέχεια παρουσίασε τα αποτελέσματα στην παρακάτω μήτρα παιχνιδιού (ή πληρωμών):

Στρατηγικές της επιχείρησης Β / Στρατη-γικές της επιχ. Α	Y_1	Y_2
X_1	–2	2
X_2	–1	3
X_3	1	2

Στην παραπάνω μήτρα οι αρνητικοί αριθμοί εκφράζουν τις απώλειες του παίκτη Α (δηλ. το ποσό που θα πληρώσει στον παίκτη Β) και τα κέρδη του παίκτη Β. Αντίθετα,

οι θετικοί αριθμοί εκφράζουν τις απώλειες του παίκτη Β (δηλ. το ποσό που θα πληρώσει στον παίκτη Α) και επομένως τα κέρδη του Α. Μελετώντας αυτή τη μήτρα παιχνιδιού μπορούμε να κάνουμε τις εξής σκέψεις:
Επειδή και οι δυο «παίκτες» θεωρούνται έξυπνοι και συνετοί, ο παίκτης Α (επιχ. Α) σε καμιά περίπτωση δεν θα επιλέξει τη στρατηγική X_1 αφού είναι οπωσδήποτε πιο συμφέρουσες για αυτόν οι στρατηγικές X_2 και X_3. Επειδή ο παίκτης Β το γνωρίζει αυτό δεν παίρνει υπόψη του καθόλου τη στρατηγική X_1. Ακολουθώντας τον ίδιο συλλογισμό δεν θα επιλέξει ποτέ τη στρατηγική Y_2 αφού θα βρίσκεται σε πιο πλεονεκτική θέση με τη στρατηγική Y_1. Αλλά και ο Α γνωρίζει ότι ο Β δεν θα εφαρμόσει τη στρατηγική Y_2 και για αυτό αποφασίζει ότι η καλύτερη στρατηγική του είναι η X_3. Η επιλογή από τους παίκτες Α και Β των στρατηγικών X_3 και Y_1 έχει σαν αποτέλεσμα να κερδίσει ο παίκτης Α 1 και ο παίκτης Β να έχει απώλεια ίση με 1. Στην τιμή άλλωστε αυτή το παιχνίδι βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, γιατί κανείς από τους παίκτες Α και Β δεν έχει λόγο να επιλέξει άλλη στρατηγική.
Γενικεύοντας μπορούμε να πούμε τα εξής: Σ' ένα παιχνίδι όπου ο κάθε παίκτης γνωρίζει τις στρατηγικές που διαθέτει ο αντίπαλος του, επιπλέον δε γνωρίζει ότι ο αντίπαλος του είναι έξυπνος και συνετός, είναι λογικό να περιμένει το χειρότερο αποτέλεσμα από κάθε στρατηγική που διαθέτει. Αυτός ο συλλογισμός έχει σα συνέπεια την εφαρμογή του κριτηρίου minimax, σύμφωνα με το οποίο ο κάθε παίκτης αποφασίζει να εφαρμόσει τη στρατηγική που θα του ελαχιστοποιήσει τη ζημία ή θα του δώσει το «μέγιστο» από τα «ελάχιστα» κέρδη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο minimax στην παραπάνω μήτρα αποτελεσμάτων και σημειώνουμε τα «ελάχιστα» των γραμμών και τα «μέγιστα» των στηλών. Το «μεγιστοελάχιστο» των γραμμών (στρατηγική X_3) εξασφαλίζει στον παίκτη Α κέρδος 1 (για αυτό ο παίκτης Α ονομάζεται ο «μεγιστοποιών παίκτης»), ενώ το «ελαχιστομέγιστο» των στηλών (στρατηγική Y_1) εγγυάται στον παίκτη Β την ζημία 1 (την οποία είναι σίγουρο ότι δεν θα ξεπεράσει, γι' αυτό ο παίκτης Β ονομάζεται «ο ελαχιστοποιών παίκτης»).

Στρατηγικές του Β / **Στρατηγι-κές του Α**	Y_1	Y_2	ελάχιστα γραμμών
X_1	−2	2	−2
X_2	−1	3	−1
X_3	1	2	1 μεγιστοελάχιστο (maximin)
μέγιστα στηλών	1	3	

ελαχιστομέγιστο
(minimax)

Η στρατηγική που επιλέγει ο Α ονομάζεται στρατηγική μεγιστοελάχιστον (maximin strategy), η αναμενόμενη δε από την εφαρμογή της πληρωμή ονομάζεται μεγιστοελάχιστη (ή χαμηλότερη) τιμή του παιχνιδιού (maximin value). Εξάλλου, η στρατηγική που επιλέγει ο Β παίκτης ονομάζεται στρατηγική ελαχιστομέγιστου (minimax strategy), η αναμενόμενη δε από την εφαρμογή της πληρωμή ονομάζεται ελαχιστομέγιστη (ή υψηλότερη) τιμή του παιχνιδιού (minimax value). Η τιμή του παιχνιδιού, V, πρέπει να ικανοποιεί την ανισοϊσότητα:

μεγιστοελάχιστη τιμή (ή πληρωμή) ≤ τιμή του παιχνιδιού V ≤ ελαχιστομέγιστη τιμή (ή πληρωμή)

Στο παράδειγμα μας έχουμε:

μεγιστοελάχιστη τιμή (ή πληρωμή) = ελαχιστομέγιστη τιμή = 1

Αυτό σημαίνει ότι το παιχνίδι έχει σημείο «σάγματος» (saddle point), που είναι το σημείο σύμπτωσης των τιμών αυτών, δίνεται δε από την είσοδο (3,1) της μήτρας του παιχνιδιού. Η αξία του παιχνιδιού, V, είναι ίση με 1 (το ποσό 1 θα κερδίσει η επιχείρηση Α και το ίδιο ποσό θα είναι η ζημία της επιχείρησης Β) . Το παιχνίδι αυτό ονομάζεται αυστηρώς αποφασισμένο, δεδομένου ότι το σημείο ισορροπίας του παιχνιδιού πραγματοποιείται στο σημείο σάγματος, το οποίο προσδιορίζει και τη βέλτιστη στρατηγική, τόσο του παίκτη Α, όσο και του παίκτη Β (X_3 και Y_1 οι βέλτιστες στρατηγικές). Οι στρατηγικές που θα εφαρμόσουν οι παίκτες είναι καθαρές, με την έννοια ότι ο παίκτης Α θα παίζει σταθερά μια στρατηγική (εδώ την X_3 με πιθανότητα = 1.0) και το ίδιο σταθερά θα παίζει μια στρατηγική και ο παίκτης Β (εδώ την Y_1 με πιθανότητα = 1.0). Η τιμή του παιχνιδιού, V, δίδεται από την κοινή είσοδο των βέλτιστων καθαρών στρατηγικών (εδώ $a_{31} = 1$), είναι δε ίση προς την μεγιστοελάχιστη και ελαχιστομέγιστη τιμή (ή πληρωμή).

Παραδείγματα παιχνιδιών με σημείο σάγματος

(Τα ελάχιστα των σειρών σημειώνονται με Ο. τα δε μέγιστα των στηλών με □).

(i)

Στρατ. Β → **Στρατ. Α ↓**	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	3	−5	0	$\boxed{6}$
X_2	−4	2	1	2
X_3	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	3

(ii)

Στρατ. Β → **Στρατ. Α** **↓**	**Y_1**	**Y_2**	**Y_3**
X_1	$\boxed{1}$	2	$\boxed{1}$
X_2	0	−4	−1
X_3	−1	3	−2

(iii)

Στρατ. Β → **Στρατ. Α** **↓**	**Y_1**	**Y_2**
X_1	$\boxed{0}$	2
X_2	−1	$\boxed{4}$

Επίλυση παιχνιδιών:

(i) Η καλύτερη στρατηγική για τον παίκτη Α είναι η X_3
Η καλύτερη στρατηγική για τον παίκτη Β είναι η Y_3
Η τιμή του παιχνιδιού είναι 2 (ευνοϊκό για τον Α)

(ii) Η καλύτερη στρατηγική για τον παίκτη Α είναι η X_1
Η καλύτερη στρατηγική για τον παίκτη Β είναι η Y_1 αλλά και η Y_3
Η τιμή του παιχνιδιού είναι 1 (ευνοϊκό για τον Α)

(iii) Η καλύτερη στρατηγική για τον παίκτη είναι η X_1
Η καλύτερη στρατηγική για τον παίκτη Β είναι η Y_1
Η τιμή του παιχνιδιού είναι 0 (το παιχνίδι είναι δίκαιο)

2. Μη αυστηρώς αποφασισμένα παιχνίδια (Non-strictly determined games) - Μικτή στρατηγική

Όταν τα παιχνίδια δεν έχουν σημείο σάγματος, τότε υπάρχει ένα χάσμα μεταξύ του «μεγιστοελάχιστου» που μπορεί να κερδίσει ο Α και του «ελαχιστομέγιστου» στο οποίο μπορεί να περιορίσει τη ζημία του ο Β, με συνέπεια να μη μπορούν να εφαρμόσουν οι παίκτες «καθαρή» στρατηγική.

Παράδειγμα:

Στρατ. Β → Στρατ. Α ↓	Y_1	Y_2	ελάχιστα γραμμών
X_1	9	6	6
X_2	7	11	7*
μέγιστα στηλών	*9	11	

Σύμφωνα με το κριτήριο maxinin, ο παίκτης A θα επιλέξει τη στρατηγική X_2, για να πετύχει τουλάχιστο το 7. Εξάλλου, ο παίκτης B θα διαλέξει την στρατηγική Y_1, για να ελαχιστοποιήσει τη ζημία του σε ποσό 9. Επειδή όμως δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας, οι δε παίκτες γνωρίζουν τα αποτελέσματα κάθε στρατηγικής, εάν ο παίκτης A υποπτευθεί ότι ο B θα εφαρμόσει τη στρατηγική Y_1 φυσικά ο ίδιος θα εφαρμόσει την X_1 (και όχι την X_2). Όμως και ο παίκτης B, εάν προβλέψει την κίνηση του A, θα προτιμήσει να εφαρμόσει τη στρατηγική Y_2, οπότε θα έχει απώλεια 6 (αντί για 9) κτλ.

Βλέπουμε λοιπόν ότι το παιχνίδι παίρνει μια τέτοια μορφή, όπου και ο A και ο B προσπαθούν να παραπλανήσουν τον αντίπαλο, με αντικειμενικό στόχο να πάρει μια λαθεμένη απόφαση. Η αδυναμία της εφαρμογής των καθαρών στρατηγικών μεγιστοελάχιστου και ελαχιστομέγιστου σε περιπτώσεις όπως το συγκεκριμένο παράδειγμα δημιούργησε την ανάγκη χρησιμοποίησης μιας μικτής στρατηγικής.

Έτσι, κάθε παίκτης, αντί να επιλέξει μόνο μια καθαρή στρατηγική, χρησιμοποιεί, με μια ορισμένη πιθανότητα, περισσότερες ή και όλες τις στρατηγικές που διαθέτει. Εάν p_1, p_2, ... , p_m και q_1, q_2, … ,q_n είναι οι πιθανότητες γραμμών και στηλών, σύμφωνα με τις οποίες επιλέγουν οι παίκτες A και B τις καθαρές τους στρατηγικές (βλ. γενικό υπόδειγμα μήτρας παιχνιδιού), τότε:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

$$p_1,\ q_j \geq 0 \text{ για όλα τα } i \text{ και τα } j.$$

Η επίλυση ενός μη αυστηρώς καθορισμένου παιχνιδιού βασίζεται πάλι στο κριτήριο minimax, δεδομένου ότι από όλες τις μικτές στρατηγικές αναζητούμε τον συνδυασμό που θα μας δώσει το μέγιστο αναμενόμενο βέβαιο κέρδος του A, που θα είναι συγχρόνως και η βέβαιη ελάχιστη ζημία του B. Η μόνη διαφορά είναι ότι ο παίκτης A επιλέγει τις p_i, που θα του μεγιστοποιήσουν την μικρότερη αναμενόμενη πληρωμή σε μια στήλη, ενώ ο παίκτης B επιλέγει τις q_j, που θα του ελαχιστοποιήσουν την μεγαλύτερη αναμενόμενη πληρωμή σε μια γραμμή. Αυτό γιατί, όταν π.χ. ο παίκτης Α διαλέγει μια ορισμένη μικτή στρατηγική, υπάρχει τουλάχιστο μια καθαρή στρατηγική του Β, η οποία θα του προξενήσει την ελάχιστη ζημία. Συνεπώς, ο Α προσπαθώντας να διαλέξει μεταξύ των μικτών στρατηγικών που διαθέτει πρέπει να βρίσκει για κάθε μια από αυτές. τη συγκεκριμένη καθαρή στρατηγική του Β, που θα του ελαχιστοποιεί τη ζημία. Το ίδιο φυσικά συμβαίνει και με τον παίκτη Β. Έτσι, το μεν maximin δίδεται από τον τύπο:

$$max\left\{\min\left(\sum\nolimits_{p_i} A(a_{i1}), \sum\nolimits_{p_i} A(a_{i2}), \ldots, \sum\nolimits_{p_i} A(a_{in})\right)\right\}$$

το δε minimax από τον τύπο:

$$min\left\{\max\left(\sum\nolimits_{q_j} A(a_{1i}), \sum\nolimits_{q_j} A(a_{2i}), \ldots, \sum\nolimits_{q_j} A(a_{mi})\right)\right\}$$

Επομένως, εξακολουθεί να ισχύει η σχέση:
ελαχιστομέγιστη αναμενόμενη τιμή (ή πληρωμή) ≥ μεγιστοελάχιστη αναμενόμενη τιμή (ή πληρωμή).
Από την στιγμή όμως που καθοριστούν οι X_i και Y_j} που αντιστοιχούν στην βέλτιστη λύση, η ανίσωση γίνεται εξίσωση, οι δε τιμές που προκύπτουν είναι ίσες προς την (βέλτιστη) αναμενόμενη τιμή του παιχνιδιού, V, δηλαδή:
ελαχιστομέγιστη πληρωμή = μεγιστοελάχιστη πληρωμή = τιμή του παιχνιδιού V.
Για την επίλυση των μη αυστηρώς αποφασισμένων παιχνιδιών (μηδενικού αθροίσματος μεταξύ δυο ατόμων) αναπτύχθηκαν διάφοροι τρόποι. Η χρησιμοποίηση του ενός ή του άλλου τρόπου επίλυσης εξαρτάται κυρίως από τις διαστάσεις της μήτρας του παιχνιδιού. Έτσι, διακρίνουμε τα παιχνίδια στις παρακάτω ομάδες:

- Παιχνίδια μήτρας 2x2 (αλγεβρική μέθοδος επίλυσης ή γραφική μέθοδος).
- Παιχνίδια μήτρας m x 2 και 2 x n (γραφική μέθοδος επίλυσης).
- Παιχνίδια με υποχωρητικές στήλες και γραμμές που ανάγονται σε παιχνίδια μήτρας 2x2 ή m x 2 ή 2 x η.
- Παιχνίδια μήτρας m x n (επίλυση με τον γραμμικό προγραμματισμό).

α) Παιχνίδια μήτρας 2x2
Παίρνουμε την παρακάτω μήτρα παιχνιδιού.

Στρατ. Β → Στρατ. Α ↓	Y_1	Y_2
X_1	9	6
X_2	7	11

Αλγεβρική μέθοδος για την επίλυση παιχνιδιού 2x2

Έστω ότι για τον παίκτη Α η πιθανότητα να διαλέξει τη στρατηγική X_1 είναι ρ_1 Επομένως, $1 - p_1 = p_2$ είναι η πιθανότητα να διαλέξει τη στρατηγική X_2. Εάν ο παίκτης Β εφαρμόσει τη στρατηγική Y_1, τότε ο Α θα έχει αναμενόμενο κέρδος (Αν.Κε) ίσο με:

$$Αν.Κε/Y_1 = (p_1 \text{ x } 9) + [(1 - p_1)x7] = 9p_1 + 7 - 7p_1 = 2p_1 + 7$$

Εξάλλου, αν ο παίκτης Β εφαρμόσει τη στρατηγική Y_2 τότε ο Α θα έχει αναμενόμενο κέρδος ίσο με:

$$Αν.Κε/Y_2 = (p_1x6) + [(1 - \rho_1) \text{ x}11] = -5p_1 + 11$$

Επειδή τον παίκτη Α τον ενδιαφέρει να έχει το ίδιο αποτέλεσμα, ανεξάρτητα από τη στρατηγική που θα εφαρμόσει ο Β, εξισώνουμε το Αν.Κε/Y_1 και Αν.Κε/Y_2 και βρίσκουμε:

$2p_1 + 7 = -5p_1 +11$

$7p_1= 4$

$P_1 = 4/7$ και $1 - p_1 = 3/7=p_2$.

Επομένως, ο Α θα παίξει την «μικτή στρατηγική» X_1 και X_2 με αναλογία 4:3, η τιμή του παιχνιδιού, V, είναι:

$$9\rho_1 + 7(1 - p_1) = (9 \text{ x } 4/7) + (7 \text{ x } 3/7) = 57/7 = 8.14$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για τον παίκτη Β θα έχουμε: Έστω q_1 η πιθανότητα να διαλέξει τη στρατηγική Y_1. Επομένως, $1 - q_1 = q_2$ είναι η πιθανότητα να διαλέξει τη στρατηγική Y_2.

Εάν ο Α εφαρμόσει τη στρατηγική X_1, τότε η αναμενόμενη ζημία του Β είναι (Αν.Απ):

$$Αν.Απ/X_2 = (q_1x\ 9) + [(1 - q_1) \text{ x } 6] = 9q_1 + 6 - 6q_1 = 3q_1 + 6$$

Εξάλλου, αν ο παίκτης Α εφαρμόσει την X_2, τότε η αναμενόμενη ζημία του Β είναι:

$$Αν.Απ/X_2 = (q_1 \text{ x } 7) + [(1 - q_1) \text{ x } 11] = 7q_1+ 11 - 11q_1 = -4q_1 + 11$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω πρέπει:

$$Αν.Απ/X_1 = Αν.Απ/X_2$$

$$\text{δηλαδή } 3q_1+ 6 = -4q_1+ 11 \Rightarrow 7q_1= 5 \text{ και } q_1 =5/7,\ 1 - q_1 =2/7 = q_2$$

Συνεπώς, ο Β θα εφαρμόσει εκ περιτροπής την «μικτή στρατηγική» Y_1 και Y_2, με αναλογία 5:2. Η τιμή του παιχνιδιού είναι ίση με:

$$V = (9x5/7) + (6x2/7) =57/7= 8.14$$

Με την «μικτή στρατηγική» που θα εφαρμόσουν οι παίκτες Α και Β θα έχουν μακροχρονίως ο μεν Α κέρδη 8.14, ο δε Β ζημία ίση με 8.14 (το παιχνίδι είναι ευνοϊκό για τον Α). Για να βρούμε απευθείας τη λύση του παιχνιδιού (μήτρας 2 x 2), χρησιμοποιούμε τις παρακάτω σχέσεις, που προκύπτουν, όπως θα δούμε, από τους προηγούμενους υπολογισμούς. Εάν εμφανίσουμε μια μήτρα 2 x 2 με την γενική μορφή:

Με την «μικτή στρατηγική» που θα εφαρμόσουν οι παίκτες Α και Β θα έχουν μακροχρονίως ο μεν Α κέρδη 8.14, ο δε Β ζημία ίση με 8.14 (το παιχνίδι είναι ευνοϊκό για τον Α). Για να βρούμε απευθείας τη λύση του παιχνιδιού (μήτρας 2x2), χρησιμοποιούμε τις παρακάτω σχέσεις, που προκύπτουν, όπως θα δούμε, από τους προηγούμενους υπολογισμούς. Εάν εμφανίσουμε μια μήτρα 2x2 με την γενική μορφή:

	παικτης Β	
παικτης Α	a	b
	c	d

Και εάν:

$$q_1 = q, \qquad q_2 = 1 - q$$
$$p_1 = p, \qquad p_2 = 1 - p$$

Μπορούμε να βρούμε το ρ_1 ρ_2, q_1 q_2 και V από τις σχέσεις:

$$(1) \quad p_1 = \frac{d - c}{a + d - b - c} \qquad (2) \quad p_2 = \frac{a - b}{a + d - b - c}$$

$$(3) \quad q_1 = \frac{d - b}{a + d - b - c} \qquad (4) \quad q_2 = \frac{a - c}{a + d - b - c}$$

$$(5) \quad V = \frac{ad - bc}{a + d - b - c}$$

Αναλυτικότερα, για να καταλήξουμε στη σχέση (1), σύμφωνα με τα παραπάνω, ακολουθούμε τον συλλογισμό: Έστω ρ η πιθανότητα επιλογής από τον Α της στρατηγικής X_1, τότε 1 - ρ η πιθανότητα επιλογής της X_2. Εάν ο Β εφαρμόσει την Y_1, τότε:

$$Αν.Κε/Y_1 = a \cdot p + (1 - p) \cdot c = a \cdot p + c - c \cdot p$$

Εξάλλου:

$$Αν.Κε/Y_2 = b \cdot p + (1 - p) \cdot d = b \cdot p + d - d \cdot p$$

αφού όμως είναι:

$$Αν.Κε/Y_1 = Αν.Κε/Y_2$$

$$\text{τότε:} \quad a \cdot p + c - c \cdot p = b \cdot p + d - d \cdot p$$
$$a \cdot p - c \cdot p - b \cdot p + d \cdot p = d - c$$
$$p\,(a - c - b + d) = d - c$$
$$p = d - c / a + b - d - c \qquad \text{κ.ο.κ.}$$

Γραφική μέθοδος για την επίλυση παιχνιδιού 2x2

Παίκτης Α: Στο προηγούμενο παράδειγμα μας έχουμε:

$$Αν.Κε/Υ_1 = 2p_1 + 7 \quad (1)$$

Εάν $p_1 = 1$ (δηλ. ο παίκτης Α χρησιμοποιεί μόνο τη στρατηγική X_1), τότε:

$$Αν.Κε/Υ_1 = 9$$

Εάν $p_1 = 0$ (δηλ. ο Α χρησιμοποιεί μόνο την X_2), τότε:

$$Αν.Κε/Υ_1 = 7$$

Εξάλλου, εάν γίνει η ίδια αντικατάσταση και στην εξίσωση:

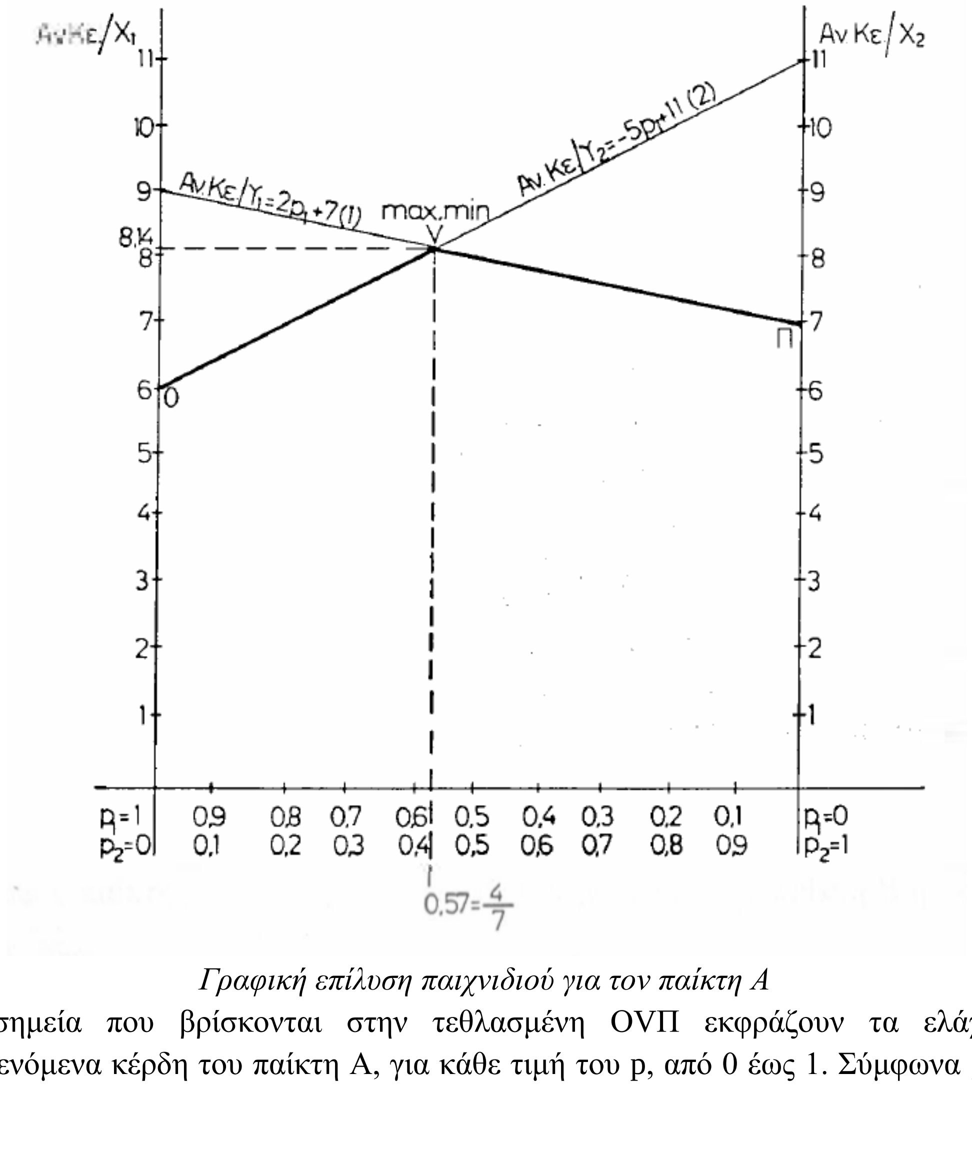
$$Αν.Κε/Υ_2 = -5p_1 + 11 \ (2)$$

θα έχουμε:

$p_1 = 1$, τότε $\quad Αν.Κε/Υ_2 = 6$

$p_1 = 0$, τότε $\quad Αν.Κε/Υ_2 = 11$

Χαράζουμε τις ευθείες που αντιστοιχούν στις εξισώσεις (1) και (2) σε δυο κάθετους άξονες προς τον άξονα Χ, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Οι πληρωμές που αντιστοιχούν στην πρώτη γραμμή (στρατηγική X_1) σημειώνονται στον πρώτο άξονα, οι πληρωμές που αντιστοιχούν στην δεύτερη γραμμή (στρατηγική X_2) σημειώνονται στον δεύτερο άξονα. Ο άξονας Χ είναι ο άξονας των πιθανοτήτων p_1, για διάφορες δε τιμές του $ρ_1$ έχουμε όλα τα σημεία των ευθειών που αντιστοιχούν στις εξισώσεις (1) και (2).



Γραφική επίλυση παιχνιδιού για τον παίκτη Α

Τα σημεία που βρίσκονται στην τεθλασμένη ΟVΠ εκφράζουν τα ελάχιστα αναμενόμενα κέρδη του παίκτη Α, για κάθε τιμή του p, από 0 έως 1. Σύμφωνα με το κριτήριο minimax, ο A επιλέγει το καλύτερο από τα χειρότερα αποτελέσματα. Αυτή η τιμή αντιστοιχεί στο σημείο V. Εάν φέρουμε τις συντεταγμένες του σημείου V, θα έχουμε:

Βέλτιστη αναμενόμενη τιμή του A = V = 8.14
Τιμή του p_1 =4/7, οπότε p_2 = 3/7
Επομένως, βέλτιστη μικτή στρατηγική του A είναι η (4/7 , 3/7).

Παίκτης Β: Παίρνουμε τη μήτρα του παιχνιδιού, με την παρακάτω όμως διάταξη:

Στρατ/κές του Β → **Στρατ/κές του Α ↓**	**X_1**	**X_2**
Y_1	9	7
Y_2	6	11

Μήτρα παιχνιδιού παίκτη Β

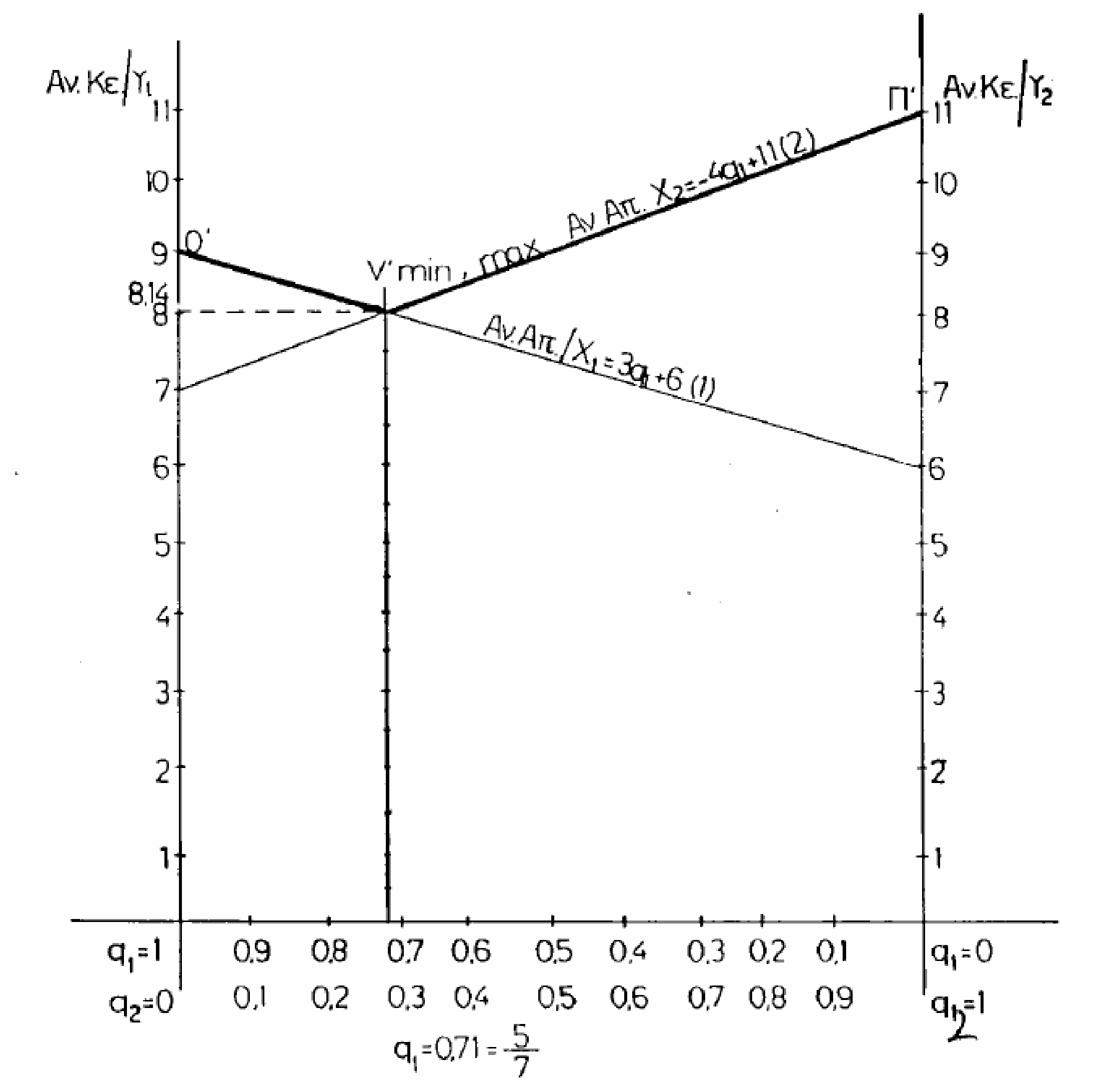
Σύμφωνα με τα προηγούμενα:

$$Αν.Απ/X_1 = 3q_1 + 6$$

Εάν q, = 1, τότε: Αν.Απ/X_1 = 9
Εάν q, = 0, τότε: Αν.Απ/X_1 = 6

$$Αν.Απ/X_2 = -4q_1 + 11$$

Εάν q_1 = 1, τότε: Αν.Απ/X_2 = 7
Εάν q_1 = 0, τότε: Αν.Απ/X_2 = 11



Γραφική επίλυση παιχνιδιού για τον παίκτη Β

Χαράζουμε τις ευθείες έτσι όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία που βρίσκονται πάνω στην τεθλασμένη O'VΠ΄ , εκφράζουν τις μεγαλύτερες αναμενόμενες ζημίες (πληρωμές) του παίκτη Β για κάθε τιμή του q_1 από το 0 έως το 1. Σύμφωνα δε με το κριτήριο minimax, ο Β επιλέγει το καλύτερο αποτέλεσμα από τα χειρότερα. Η τιμή αυτή αντιστοιχεί στο σημείο V. Επομένως, η τιμή του παιχνιδιού είναι V = 8.14 (που θα χάσει ο παίκτης Β) και η βέλτιστη μικτή στρατηγική του παίκτη Β η (5/7 , 2/7).

β) Παιχνίδια με υποχωρητικές γραμμές και στήλες

Όταν έχουμε να λύσουμε ένα παιχνίδι, το πρώτο που κάνουμε είναι να δούμε αν έχει σημείο «σάγματος». Εάν διαπιστώσουμε ότι το παιχνίδι δεν είναι αυστηρώς αποφασισμένο, τότε το επόμενο βήμα είναι να περιορίσουμε, εάν φυσικά είναι δυνατόν, τις στήλες και τις γραμμές έτσι, ώστε να παραμείνουν τελικά οι κυρίαρχες και να περιορισθεί το παιχνίδι σε 2x2 (που ήδη είδαμε τον τρόπο επίλυσης του) ή σε mx2 ή 2xn (που θα λύσουμε παρακάτω). Οι κανόνες που ακολουθούμε είναι δυο:

α) Κανόνας *«κυριαρχίας»* των γραμμών: «Κυρίαρχη» (συνεπώς παραμένει) είναι μια γραμμή, όταν κάθε στοιχείο της είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το αντίστοιχο στοιχείο μιας άλλης γραμμής, που γι' αυτό λέγεται «υποχωρητική» (δεν λαμβάνεται υπόψη).
β) Κανόνας *«κυριαρχίας»* των στηλών: «Κυρίαρχη» είναι μια στήλη που κάθε στοιχείο της είναι μικρότερο ή ίσο από το αντίστοιχο στοιχείο μιας άλλης, που γι' αυτό λέγεται «υποχωρητική» στήλη.

Παράδειγμα:
Το παιχνίδι γίνεται 2x2, δηλαδή:

(i)

παικτης Β

παικτης Α

	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	−5	−3	2
X_2	2	−1	2
X_3	−2	3	4

παικτης Β

παικτης Α

	Y_1	Y_2
X_1	2	−1
X_2	−2	3

(ii)

παικτης Β

παικτης Α

	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	0	1	0
X_2	1	0	1
X_3	0	1	1

	παικτης Β	
	Y_1	Y_2
παικτης Α X_1	1	0
X_2	0	1

γ) Παιχνίδια μήτρας m x 2 και 2 x n

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα παιχνίδια στα οποία υπάρχουν δύο παίκτες και ο ένας παίκτης διαθέτει δυο στρατηγικές, ο δε άλλος περισσότερες από δυο. Ο πιο απλός τρόπος για την επίλυση αυτών των παιχνιδιών είναι η γραφική μέθοδος. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, προσδιορίζεται ένα ακραίο σημείο, που είναι τομή ή δυο ευθειών οι οποίες εκφράζουν δυο στρατηγικές (φυσικά του παίκτη που διαθέτει περισσότερες από δύο). Μ΄ αυτό τον τρόπο καθορίζονται οι κυρίαρχες στρατηγικές, το δε παιχνίδι περιορίζεται σε 2x2 και για τον καθορισμό πλέον της «μικτής» στρατηγικής εφαρμόζεται η γνωστή διαδικασία:

Παράδειγμα πρώτο (1);

Έστω ότι έχουμε την παρακάτω μήτρα παιχνιδιού:

Στρατ/κές του Β → Στρατ/κές του Α ↓	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	1	4	5
X_2	4	3	1

Σύμφωνα με αυτά που αναφέραμε πια παράδειγμα της μήτρας 2x2, όπου χρησιμοποιήσαμε την γραφική μέθοδο, φέρνουμε τις ευθείες:

$$\text{Αν.Κε}/Y_1 = p_1 + (1-p_1)\,4 = -3p_1 + 4 \qquad (1)$$

Εάν $p_1 = 1$, Αν.Κε/Y_1 =1

Εάν $p_1 = 0$, Αν.Κε/Y_1 =4

$$\text{Αν.Κε}/Y_2 = 4p_1 + (1-p_1)\,3 = p_1 + 3 \qquad (2)$$

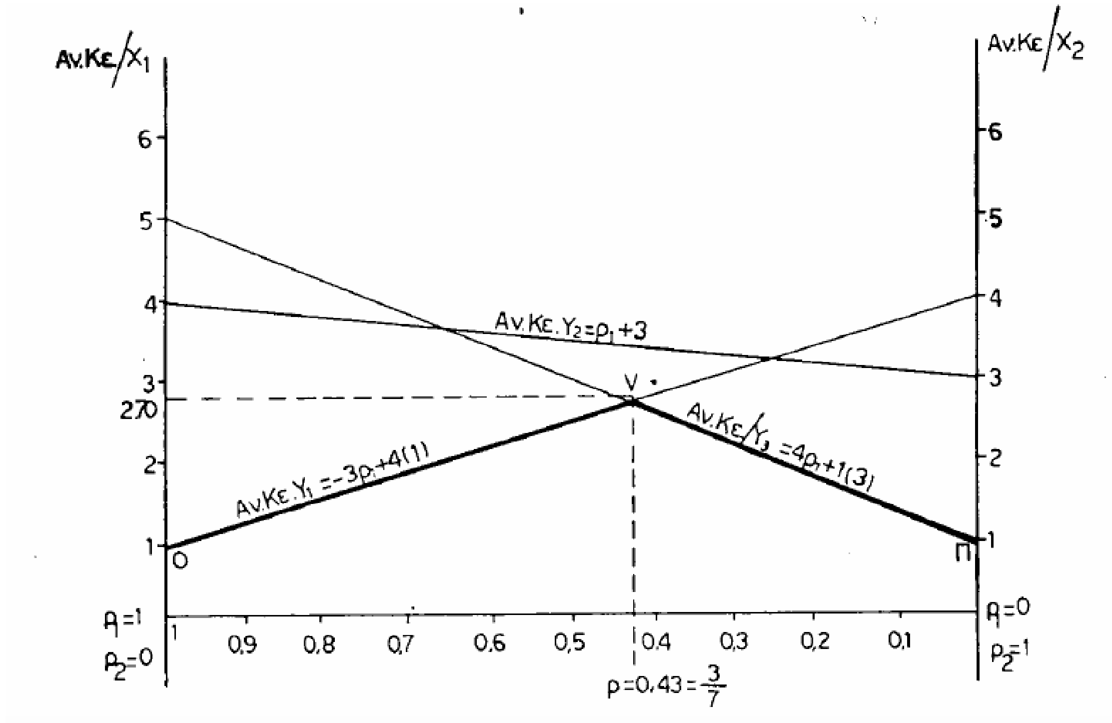
Εάν $p_1 = 1$, Αν.Κε/Y_2 =4

Εάν $p_1 = 0$, Αν.Κε/Y_2 =3

$$\text{Αν.Κε}/Y_3 = 5p_1 + (1-p_1) = 4p_1 + 1 \qquad (3)$$

Εάν $p_1 = 1$, Αν.Κε/Y_3 =5

Εάν $p_1 = 0$, Αν.Κε/Y_3 =1



Γραφική επίλυση παιχνιδιού για τον παίκτη Α

Όπως φαίνεται από το παραπάνω διάγραμμα, περιορίζουμε το κάτω τμήμα με πιο έντονη γραμμή, διότι οι ευθείες εκφράζουν τις στρατηγικές του Β, και αφού ο Β κερδίζει όταν το αποτέλεσμα είναι αρνητικό, τον ενδιαφέρει στο συγκεκριμένο παιχνίδι να περιορίσει στο ελάχιστο τη ζημία του. Έτσι, οι δυνατές λύσεις βρίσκονται στην τεθλασμένη ΟV"Π και η ισορροπία του παιχνιδιού πραγματοποιείται στο σημείο V, όπου ο Α έχει το καλύτερο από τα χειρότερα αποτελέσματα (και όπου ο Β περιορίζει στο ελάχιστο τα κέρδη του Α, επομένως και την ζημία του). Το σημείο V δίνει την τιμή του παιχνιδιού V = 2.70 και τη βέλτιστη μικτή στρατηγική του Α (3/7, 4/7). Επίσης, το σημείο V καθορίζει και τις βέλτιστες καθαρές στρατηγικές του Β(Y_1, Y_3). Επειδή το σημείο maximin καθορίζεται από την τομή δυο ευθειών, (1) και (3), η ευθεία (2) δεν λαμβάνεται υπόψη, διότι η πιθανότητα χρησιμοποίησης της είναι ίση προς το 0. Το παιχνίδι περιορίζεται σε 2 x 2, δηλαδή:

Στρατ/κές του Β → **Στρατ/κές του Α** ↓	Y_1	Y_2
X_1	1	5
X_2	4	1

Οπότε, οι πιθανότητες χρησιμοποίησης από τον Β των στρατηγικών Y, και Y, είναι:

$$q_1 = \frac{d - b}{a + d - b - c} = \frac{4}{7} = 0{,}57 \qquad q_2 = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7} = 0{,}43$$

$$V = \frac{ad - bc}{a + d - b - c} = \frac{19}{7} = 2.70$$

Συνεπώς, η βέλτιστη μικτή στρατηγική του Β είναι η (4/7,3/7).

Παράδειγμα δεύτερο (2):

Έχουμε την ακόλουθη μήτρα παιχνιδιού:

Στρατ/κές του Α → **Στρατ/κές του Β ↓**	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	–6	–3	–8	–7
X_2	–5	–6	–4	1

Φέρνουμε τις παρακάτω ευθείες:

$Αν.Κε/Y_1 = (-6p_1) + [(1 – p_1) x (-5)] = -p_1 - 5$ (1)

Εάν $p_1= 1$, $Αν.Κε/Y_1 = -6$

$p_1= 0$, $Αν.Κε/Y_1 = -5$

$Αν.Κε/Y_2 = (-3p_1) + [(1 – p_1) x (-6)] = 3p_1 - 6$ (2)

Εάν $p_1= 1$, $Αν.Κε/Y_2 = -3$

$p_1= 0$, $Αν.Κε/Y_2 = -6$

$Αν.Κε/Y_3 = (-8p_1) + [(1 – p_1) x (-4)] = -4p_1 - 4$ (3)

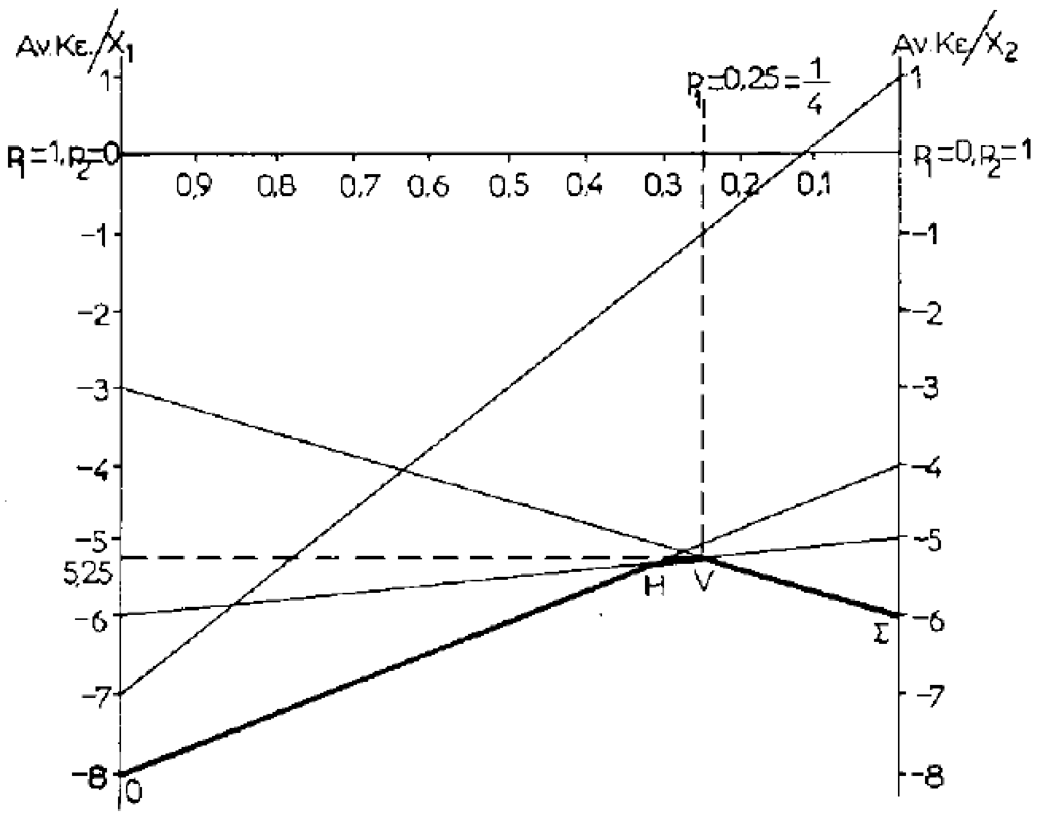
Εάν $p_1= 1$, $Αν.Κε/Y_3 = -8$

$p_1= 0$, $Αν.Κε/Y_3 = -4$

$Αν.Κε/Y_2 = (-7p_1) + (1 – p_1) = -8p_1 +1$ (4)

Εάν $p_1= 1$, $Αν.Κε/Y_4 = -7$

$p_1= 0$, $Αν.Κε/Y_4 = 1$



Γραφική επίλυση παιχνιδιού για τον παίκτη Α

Παρατηρούμε ότι περιορίζουμε το κάτω τμήμα. Το παιχνίδι, όπως είναι προφανές, ευνοεί τον Β, ο οποίος έχει το μεγαλύτερο από τα ελάχιστα κέρδη στο σημείο V. Το σημείο V προσδιορίζει και τις δυο κυρίαρχες στρατηγικές του Β (Y_1, Y_2), την τιμή του παιχνιδιού, V = -5,25 (ζημία του Α) και τη

βέλτιστη μικτή στρατηγική του Α, που είναι η $p_1 = 0.25 = 1/4$ και $p_2 = 0.75 = 3/4$. Σύμφωνα δε με τους τύπους που χρησιμοποιούμε στα παιχνίδια 2x2, μπορούμε να βρούμε και την λύση του παιχνιδιού για τον παίκτη Β. Έτσι:

$q_1 = 3/4$ και $q_2 = 1/4$ και V=-5.25

Συνεπώς, η βέλτιστη μικτή στρατηγική του παίκτη Β είναι η (3/4,1/4).

δ) Παιχνίδια μήτρας m χ n (Επίλυση με την μέθοδο Simplex)

Έστω ότι έχουμε την παρακάτω μήτρα παιχνιδιού Α:

Στρατ/κές του Β → Στρατ/κές του Α ↓	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	2	1	–1
X_2	–1	2	–1
X_2	–1	–1	0

Προσθέτουμε τον αριθμό 2, για να γίνουν όλα τα στοιχεία της μήτρας θετικά, οπότε έχουμε την παρακάτω μήτρα A*:

Στρατ/κές του Β → Στρατ/κές του Α ↓	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	4	3	1
X_2	1	4	1
X_2	1	1	2

Παίκτης Α

Όπως γνωρίζουμε, ο παίκτης Α επιλέγει την στρατηγική που θα του δώσει το καλύτερο από τα χειρότερα αποτελέσματα. Επομένως, εάν το αναμενόμενο σίγουρο μέγιστο κέρδος που θα έχει ο Α, για οποιαδήποτε στρατηγική ακολουθήσει ο Β, είναι V* (V* αντιστοιχεί στην μήτρα A*, ενώ V στην μήτρα A) και εάν p_1, p_2, p_3 είναι οι πιθανότητες επιλογής των στρατηγικών X_1, X_2, X_3, τότε το αναμενόμενο κέρδος του Α για κάθε μια από τις καθαρές στρατηγικές του Β είναι:

$$4p_1+p_2+p_3 \geq V^*$$

$$3p_1+4p_2+p_3 \geq V^*$$

$$4p_1+p_2+2p_3 \geq V^*$$

όπου

$$p_1+p_2+p_3=1$$

Διαιρούμε τα δυο μέλη των ανισοϊσοτήτων δια του V* και έχουμε:

$$\frac{4p_1}{V^*}+\frac{p_2}{V^*}+\frac{p_3}{V^*} \geq 1$$

$$\frac{3p_1}{V^*}+\frac{4p_2}{V^*}+\frac{p_3}{V^*} \geq 1$$

$$\frac{p_1}{V^*}+\frac{p_2}{V^*}+\frac{2p_3}{V^*} \geq 1$$

Καθώς και

$$\frac{p_1}{V^*}+\frac{p_2}{V^*}+\frac{p_3}{V^*}=\frac{1}{V^*}$$

Εάν βάλουμε όπου $p_1/V^*=x_1$, $p_2/V^*=x_2$, $p_3/V^*=x_3$, Θα έχουμε:

$$4x_1+x_2+x_3 \geq 1$$

$$3x_1+4x_2+x_3 \geq 1$$

$$x_1+x_2+2x_3 \geq 1$$

όπου

$$x_1+x_2+x_3=1/V^*$$

Ο παίκτης Α επιδιώκει να μεγιστοποιήσει την τιμή του V* ή να ελαχιστοποιήσει την τιμή $1/V^*$. Επομένως, είναι προφανές ότι το παιχνίδι μπορεί να διατυπωθεί σαν πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, με την παρακάτω μορφή:

Να βρεθούν μη αρνητικοί αριθμοί x_1, x_2, x_3 που πληρούν τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
&4x_1+x_2+x_3-x_4 + x_7 = 1\\
&3x_1+4x_2+x_3 - x_5 + x_8 = 1\\
&x_1+x_2+2x_3 - x_6 + x_9 = 1
\end{aligned}$$

Και δίνουν το ελάχιστο της συνάρτησης:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{V^*}$$

Εξάλλου στη γενική του μορφή έχει ως εξής:

Να βρεθεί το max z= V

Που ικανοποιεί τους περιορισμούς

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq V,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \text{ για όλα τα } i$$

Όπου V η τιμή του παιχνιδιού.

Παίκτης Β

Ο παίκτης Β επιλέγει επίσης τη στρατηγική που θα του δώσει το καλύτερο από τα χειρότερα αποτελέσματα. Συνεπώς, εάν η αναμενόμενη ελάχιστη ζημία την οποία δεν θα υπερβεί ο Β, για οποιαδήποτε στρατηγική χρησιμοποιήσει ο Α, είναι V* και εάν q_1 q_2, q_3, είναι οι πιθανότητες επιλογής των στρατηγικών Y_1, Y_2, Y_3, τότε η αναμενόμενη ζημία του Β για κάθε μια από τις καθαρές στρατηγικές του Α είναι:

$$\begin{aligned}
4q_1 + 3q_2 + q_3 &\leq V^*\\
q_1 + 4q_2 + q_3 &\leq V^*\\
q_1 + q_2 + 2q_3 &\leq V^*
\end{aligned}$$

και

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη των ανισοτήτων δια του V^*

$$\frac{4q_1}{V^*} + \frac{3q_2}{V^*} + \frac{q_3}{V^*} \leq 1$$

$$\frac{q_1}{V^*} + \frac{4q_2}{V^*} + \frac{q_3}{V^*} \leq 1$$

$$\frac{q_1}{V^*} + \frac{q_2}{V^*} + \frac{2q_3}{V^*} \leq 1$$

και

$$\frac{q_1}{V^*} + \frac{q_2}{V^*} + \frac{q_3}{V^*} = \frac{1}{V^*}$$

Εάν βάλουμε όπου $q_1/V^*=y_1$, $q_2/V^*=y_2$, $q_3/V^*=y_3$, Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} 4y_1 + 3y_2 + \ \ y_3 &\le 1 \\ y_1 + 4y_2 + \ \ y_3 &\le 1 \\ y_1 + \ \ y_2 + 2y_3 &\le 1 \end{aligned}$$

και

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{V^*}$$

Ο παίκτης Β επιδιώκει να ελαχιστοποιήσει την τιμή του V* ή να μεγιστοποιήσει την τιμή του 1/V* . Το πρόβλημα με την προσθήκη των χαλαρών μεταβλητών y_4, y_5, y_6 παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} 4y_1 + 3y_2 + \ \ y_2 + y_4 &= 1 \\ y_1 + 4y_2 + \ \ y_3 + \ \ y_5 &= 1 \\ y_1 + \ \ y_2 + 2y_3 + \ \ y_6 &= 1 \end{aligned}$$

Να βρεθούν μη αρνητικοί αριθμοί y1, y2, y3 που πληρούν τους περιορισμούς:
και δίνουν το μέγιστο της συνάρτησης:

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{V^*}$$

Με βάση αυτές τις σχέσεις καταρτίζουμε τον αρχικό πίνακα simplex και σε συνέχεια, εφαρμόζοντας τη γνωστή υπολογιστική διαδικασία, καταλήγουμε στον τελικό πίνακα, που μας δίνει την βέλτιστη λύση.

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

(Αρχικός πίνακας simplex*)*

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
y_4	4	3	1	1	0	0	1
y_5	1	4	1	0	1	0	1
→ y_6	1	1	2	0	0	1	1
z	-1	-1	-1	0	0	0	*

↑

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
y_4	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	1	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_5	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
z	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
y_1	1	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
y_5	0	$\frac{22}{7}$	0	$\frac{-1}{7}$	1	$-\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$
y_3	0	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{-1}{7}$	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$
	0	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

ΠΙΝΑΚΑΣ IV

(Βέλτιστη λύση)

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
y_1	1	0	0	$\frac{7}{22}$	$\frac{-5}{22}$	$-\frac{1}{22}$	$\frac{1}{22}$
y_2	0	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{7}{22}$	$-\frac{3}{22}$	$\frac{3}{22}$
y_3	0	0	1	$-\frac{3}{22}$	$-\frac{1}{22}$	$\frac{13}{22}$	$\frac{9}{22}$
	0	0	0	$\frac{3}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{13}{22}$
				x_1	x_2	x_3	

Από τον τελικό πίνακα (IV) προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\max \frac{1}{V^*} = \frac{13}{22}, \text{ επομένως } V^* = \frac{22}{13}$$

$$y_1 = \frac{1}{22}, \quad y_2 = \frac{3}{22}, \quad y_3 = \frac{9}{22}$$

Συνεπώς:

$$q_1 = y_1 \times V^* = \frac{1}{22} \times \frac{22}{13} = \frac{1}{13}$$

$$q_2 = y_2 \times V^* = \frac{3}{22} \times \frac{22}{13} = \frac{3}{13}$$

$$q_3 = y_3 \times V^* = \frac{9}{22} \times \frac{22}{13} = \frac{9}{13}$$

Άρα η βέλτιστη μικτή στρατηγική του Β είναι η (1/3, 3/13, 9/13).

Επειδή όμως το παιχνίδι του παίκτη Β είναι το δυϊκό του παίκτη Α, από τον τελικό πίνακα IV προκύπτει και η λύση του παιχνιδιού για τον Β, δηλαδή από την τελευταία γραμμή (στήλες 4, 5, 6), έχουμε:

$$X_1=3/22,\ X_2=1/22,\ X_3=9/22$$

Οπότε

$$p_1 = x_1 \times V^* = \frac{3}{22} \times \frac{22}{13} = \frac{3}{13}$$

$$p_2 = x_2 \times V^* = \frac{1}{22} \times \frac{22}{13} = \frac{1}{13}$$

$$p_3 = x_3 \times V^* = \frac{9}{22} \times \frac{22}{13} = \frac{9}{13}$$

Δηλαδή, η βέλτιστη στρατηγική του παίκτη Α είναι η (3/13, 1/13, 9/13). Η τιμή δε του παιχνιδιού, V, είναι ίση με V* = -2, δηλαδή V = (22/13)-2 =4/13 (κερδίζει ο παίκτης Β: 4/13 και χάνει ο Α: -4/13).